教育研究集刊
第六十輯第二期　2014年6月　頁1-40

表徵與國小學生代數思考之初探性研究

陳嘉皇、梁淑坤

摘要

本研究旨在透過不同表徵問題，檢驗理解學生一般化表現情形，依據表現顯示之難易度，解析學生一般化適用之表徵類型，並探索表徵可提供何種相關啟示來協助學生一般化。研究樣本為國小五、六年級學生，共423人，利用測驗調查及訪談方式蒐集資料，資料分析採量化與質性併陳方式進行。研究發現包括：一、六年級學生一般化的表現較五年級學生佳，且有顯著差異存在；二、學生在各問題的反應呈現以表格表徵的問題表現最佳，其次是文字與圖形表徵，再者為圖像表徵問題的表現，而數字表徵則最感困難；三、表格、圖形與文字表徵的問題可適用於學生一般化歷程發想、問題的理解、變數的辨識、結構關係的連結和發展；四、圖像與數字表徵問題可激發學生對變數關係的發展加以推理與臆測，形成規則進行解題。

關鍵詞：一般化、代數思考、表徵

陳嘉皇，國立臺中教育大學數學教育學系副教授（通訊作者）
梁淑坤，國立中山大學教育研究所教授
電子郵件：chenchai1109@yahoo.com.tw
投稿日期：2013年05月01日；修改日期：2014年02月20日；採用日期：2014年04月23日

Bulletin of Educational Research
June, 2014, Vol. 60 No. 2 pp. 1-40

An Exploratory Study of Mathematical Representation and Algebraic Thinking of Elementary School Students

Chia-Huang Chen Shuk-Kwan Leung

Abstract

This study provided various representation problems with which to evaluate students' performance in generalization. The types of representation appropriate for generalization were determined according to the difficulty and characteristics of the representation problems. A total of 423 fifth and sixth grade students underwent generalization tests and interviews, the results of which were subjected to both quantitative and qualitative analysis. The results showed that sixth grade students significantly outperformed fifth grade students in generalization problems. In addition, students performed most favorably in table representation problems, followed by text, graphs, and pictorial representations. The students felt that numeric representation was the most difficult. We found that representation problems adopting tables, graphs, and text are suitable for thinking in the process of generalization problems, variable

Chia-Huang Chen, Associate Professor, Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education (Correspondence Author)
Shuk-Kwan Leung, Professor, Department of Education, National Sun Yat-sen University
Email: chenchai1109@yahoo.com.tw
Manuscript received: May. 01, 2013; Modified: Feb. 20, 2014; Accepted: Apr. 23, 2014.

recognition, and the connection and development of structural relationships. Pictorial and numeric representations were shown to stimulate students to speculate about variable relationships and form rules with which to solve problems. We believe that the results of this study provide a valuable reference for researchers in terms of algebraic thinking and instructional development.

Keywords: generalization, algebraic thinking, representations

壹、緒論

代數是數學教育的核心，可幫助學生理解數學的概念與步驟，創造和解釋數學的模式，但長久以來，卻只被視為是進入較高階數學的門檻，是種「不公平的機器」，嚴重使得學生產生疏離（Kaput, 1998）。Kaput認為，要解決代數學習所造成的不公平現象，須將代數的學習視為是新公民的權力、所有學生都需擁有的經驗。為呼應「所有人的代數」之要求，美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）重新檢驗學校的代數教學，認為代數不應是國中以後才被教導的科目，應從幼稚園起就不斷地持續接觸。而我國教育部（2003）順應世界潮流，為培養學生觀察數量關係，展現數學結構的能力，也將代數主題向下延伸至小學。Kaput提議代數的內涵需包含一般化和形式化的樣式與其限制、系統的引導形式化的操弄、抽離關係結構與系統計算的研究、整合控制的變項、模式與現象的語言群集，才能透過數學知識的應用，融入不同形式的代數思考。Kaput同時也主張代數的學習應提供有規則變化的樣式給予學生操作，從推理的歷程發現數學問題的結構關係，進而以數學的符號或表列式整合數學概念。

但何謂一般化？Dreyfus（1991）將其視為辨認範例的共通性（commonalities），對特殊範例進行推知（derive）或化約（induce），將正確歸納的結果擴展到更多案例的歷程。Kieran（1996）認為，代數進程需包含表徵、轉化與後設層次活動的連結，才能有效地協助學生進行代數思考。表徵的活動包含產出表列式以呈現問題關係；轉化的活動則以規則之間的變化為主，例如：因素分解與簡化項目，其重點在於形式變化時能保留等價的概念；後設層次的活動則為應用適當的代數內容做為工具，進行解題、塑造和證明。

上述學者皆建議，算術是代數的一部分，小學的教學必須將重點放在支持算術有關的代數特徵上，而代數特徵的呈現，就以樣式一般化的活動最為適宜（Kaput, 1998; NCTM, 2000）。在臺灣，《九年一貫課程綱要》中之「連結」能力指標詮釋有關「轉換」部分，強調學生能把情境中與問題相關的數、量及形析出，並以數學語言表出，熟悉解題的各種歷程，包含蒐集、觀察、臆測、檢驗、

推演、驗證、論證等，以求克盡其功，如此一般化就是最佳的活動（教育部，2003）。例如：小學低年級之九九乘法活動，教師若能以數列的方式逐次呈現，將有助於學生觀察積的前後變化以及被乘數和乘數之間的關係，經由一般化而學習乘法「倍數」的概念；中年級之乘法交換律與結合律律則的學習，亦可透過數量之圖示範例比較，經由一般化整合後得出$A \times B = B \times A$或（$A \times B$）$\times C = A \times$（$B \times C$）的概念；到高年級怎樣解題的單元，一般化更可促進學生對函數關係的理解。另外，在圖形面積公式的歸納、分數小數概念的理解上，若能透過一般化的活動，亦可協助學生輕易解題。由此可知，一般化能力的展現可應用於國小數學許多重要的領域上。代數符號包含複雜的規則與內在關係，學生若能理解樣式和符號規則與它們之間的關係，將能進行數學的溝通並產出概念。協助學生克服代數思考的困境，首要任務就在於理解他們如何對樣式問題進行推想和解題？如何對樣式一般化的推想和解題進行連結？Blanton與Kaput（2002）主張，學生可透過表徵對情境進行感知與呈現組織的意義，進而描述情境的運算與關係，問題可採取文字、圖形、表格、方程式等呈現案例，經過判讀與應用後，可做為發展一般化的基礎。

表徵是符號、特徵、影像或物件的輪廓圖像，可以「代表」或「呈現」某些事物。以表徵的本質而言，「呈現」此術語可採用多種方法加以說明，例如：對應（correspond to）、表示（denote）、描繪（depict）、體現（embody）、編碼（encode）、誘導（evoke）、標記（label）、解釋（mean）、產出（produce）、指涉（refer to）、建議（suggest）、符號化（symbolize）等（Goldin, 1998）。要具體呈現這些定義，需將進行「呈現」時所包含的實體加以區別，採取一些方式讓某實體可代表另一實體，例如：可用符號或文字表示可被計數出的具體物件集合。

近年來，NCTM（2000）明瞭算術「轉換」（translating）代數的重要性，將表徵視為是「歷程的標準」，將其解釋為數學領域獲得和運用知識的方法，例如：學童會運用數字呈現號碼、字母代表變數、特殊的特徵（如＋、－、×、÷代表數學和邏輯的運算）。NCTM指出，「不同的表徵可從不同的觀點詮釋相同複雜的概念或關係」。因此，要深入確認數學知識，學童需要一些不同表徵來支持他們的理解。而不同表徵問題的呈現，將有助於學生推理、臆測等一般化能力

的促進。雖然表徵應用的研究愈來愈受到重視，然觀察教學實務與樣式關聯的議題，除文字與圖形表徵較常用於課室外，其餘表徵案例成效的探討則較為缺乏。是否任何表徵的問題都可促進學生一般化？學生在不同表徵問題的解題表現都一樣？若要提升學生數學成就表現，針對不同表徵問題可提供學生何種樣式，一般化的啟示是值得探討的。透過上述動機說明，本研究擬透過數學作業的調查與訪談方式探索學生一般化的表現及表徵與一般化表現交互作用的情形，目的如下：

一、探究國小五、六年級學生一般化表現的情形，明瞭學生代數思考作業的狀況，以做為改善教學之依據。

二、比較學生在不同表徵問題之一般化表現，瞭解表徵作業與學生代數思考之交互作用情形，以做為代數思考課程設計參考之要領。

三、探索不同表徵問題可提供學生一般化表現何種啟示，以掌握一般化進程，提升學習表現。

貳、文獻探討

一、代數思考與表徵的關係

數學一般化是個體對數學物件的特性加以觀察、連結以產生合宜的規則，進而利用此規則解題與應用的歷程。如何讓學生辨識問題、正確推想，獲得一般化的能力，是數學概念連結與發展的重要議題（Nathan & Kim, 2007）。Nathan與Kim（2007）認為，運用表徵可幫助學生理解數學概念；Earnest與Balti（2008）則認為代數問題的設計取向，會影響代數思考如何進行，因此問題設計的重點應在於激發與提升學生參與辨識、擴展及預測樣式的運用，表徵就是最佳的工具。

呈現表徵的方式可分為描述（depiction）和符號化（symbolization）兩種（Goldin & Kaput, 1996），前者以圖像為主，後者則以公式為代表。賦予這些符號和圖像表徵力量的方法，可透過較高層次的結構，即同時呈現不同表徵而建立彼此的關係。表徵內或表徵之間的結構，以及內在和外在表徵之間的符號關係，可將數學的「意義」和「理解」進行編碼。Goldin（2003）認為，學童表徵的發展需經三個階段：

（一）創造／符號的（inventive/semiotic）階段：經由先前已建立的表徵推論而賦予內在輪廓結構的意義。

（二）結構發展的階段（a period of structural development）：透過最初賦予的意義而啟動，這些存在於較新系統內的關係，是建構在先前意義的模板上。

（三）自發階段（an autonomous stage）：此時的表徵依照功能情況，彈性配合新意義及新情境，從較早的表徵中分離，此階段可被描述成數學概念的歷史發展。

此三階段對兒童概念的理解和意義的建構，可提供代數學習歷程的分析。在符號階段，經過新特徵和結構的介紹後，經常提供最初表徵的意義做為長期心理狀態「真實的意義」（real meaning）。因此，對學童來說，計數具體物件的結果，可依其功能當作是「真實的」數字。而結構化階段雖無明顯特徵可加以觀察，但仍會持續發展，因為真實意義的概念已經被確認。最後，此新表徵會增加力量而變成自發性，但也只有在表徵成為其他新的解釋時才行。由此可見，這些說明設下了認知障礙，因為學生必須放棄最初、已建構的表徵所連接的符號，直到形成新符號的行動，才能提供新的意義（Goldin, 2003）。

至於如何將表徵的符號意義連結一般化？Dreyfus（1991）認為，需經歷四個階段才能展現一般化的能力：

（一）能使用單一的表徵代表變數的意義。

（二）運用更多類型的表徵表示變數發展或變化的意義。

（三）可同時將不同表徵產生的意義做連結。

（四）整合及彈性運用表徵。

此歷程建議學生需經辨識、理解變數意義、連結變數變化關係，整合與歸納成規則或結構，進而解決問題。此論述與NCTM（2000）所強調的學生是否理解數學概念可從其能否對各種表徵進行轉換和應用的觀點一致。然觀察課室，教師常將教學的焦點放在單一變數與其變化意義的呈現上，認為只要配合意義的呈現，無需線索的暗示或重點指導，學生自然就能達到後兩階段的連結與轉換。但事實不然，Dreyfus（1991）認為，學生雖可辨識問題中表徵呈現的變數意義，卻無法根據變數發展的脈絡來歸納問題的結構和規則。另一現象則為教師以文字或圖形表徵的文本進行教學，並未配合其他表徵進行數學概念的轉化。為協助學

生進行一般化，Dreyfus認為，問題設計必須放在多元表徵的發展與連結，融合一般化的活動，不只建構變數的意義，還需協助學生進行表徵的轉化，連結問題情境的結構。Kilpatrick、Swafford與Findell（2001）在《加入進來：幫助兒童學習數學》（*Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*）一書裡，針對學生數學能力的培養，不僅大聲疾呼教師應藉由此種方式的引導，建構學生堅實的數學能力，同時還舉出許多研究實例支持其觀點。鑑此，本研究採取Dreyfus的觀點，設計多種不同形式表徵提供學生操作，以進行數學概念的轉換，從中探索其表現情形。

表徵與學生一般化的發展關係密切，具體而言，小學學生的數學一般化在於能辨識情境變項、尋找規則與關係，並利用文字、符號歸納算式以解決複雜的問題。因此，一般化的發展與培養，可根據學生接觸的學習材料，配合其認知思考層次，融入數字模式與幾何圖形等表徵而增強。這些表徵設計的問題可協助學生從問題提供的資訊，辨識何者為常數，並從不同表徵問題中發現變數，推想至離原先問題更遠的數值，利用一般化的規則解題（Nathan & Kim, 2007）。

儘管學者已對一般化活動設計的法則提供具體的建議與步驟，然而，不同表徵問題產出的一般化表現，是否會因為學生的經驗而有所差異？學生知覺到何種表徵的問題最容易進行一般化？表徵可提供何種助益協助學生一般化？在樣式一般化歷程中，這些議題是值得探究的，因為從這些反應可瞭解何種表徵設計的活動適用於國小學生一般化的發展，從學生解題歷程呈現出的思考與策略，亦可協助教師掌握一般化教材的重點與學生能力發展的脈絡。

二、不同表徵之一般化表現探討

學生在不同表徵設計的問題解題表現如何？根據研究分析，大致呈現語文表現較為優勢的結果（Friel, Curcio, & Bright, 2001; Koedinger & Nathan, 2004; Nathan & Kim, 2007）。Nathan與Kim（2007）研究發現，具語文優勢者在文字樣式一般化的表現，相較於圖形作業，其成功比率較高，他們認為主要原因在於自然語言是學生最容易理解的，文字表徵與學生的社會和認知發展有很大的連結，當理解文字和意義的歷程被活化後，學生就會調整解題的行動，所以在此種表徵設計的問題表現會比較好。Koedinger與Nathan（2004）的研究也提供支持的證

據，他們給予六至八年級的學生文字說明與代數符號的等式，配對故事的問題加以呈現、描述關係，比較學生學習代數課程的表現和策略，分析符號與文字情境之間表現的差異，以及故事情境對文字與符號等式產生的影響，結果發現，修習代數的學生會透過策略的運用及發明的解題方案，解決文字等式問題，文字較符號設計的等式問題有較高層次的表現。

Friel等人（2001）的研究發現，學生在語文表徵的解題表現較圖形佳，而且經常對於圖形的意義和運用產生混淆，以致產生錯誤，包括：

（一）描繪特殊數量關係時，對圖形基本意義理解的貧乏。當學生利用語言說明圖形時，常會期待圖形形狀的呈現能配合情境的趨勢，而非數值之間的數量關係。

（二）對圖形要素理解的欠缺。學生也常投射特定的線性觀念在圖形的表徵上，只顯示某種斜率或是軸上的刻度，或是零截距。

（三）學生透過圖形呈現的架構範圍，受限於其呈現的極端模式而變得僵化。

Friel等人（2001）指出，學生對閱讀與解釋圖形的意義是困難的，他們發現一般化歷程若只呈現圖形的模式，學生的解題表現會降低，若要改善其缺失，較佳的方式是能同時結合語文和圖形呈現資料。透過語文的特徵協助描述圖形資料，可提升學生一般化的表現。Blanton與Kaput（2002）主張，任何表徵的一般化是代數思考重要的能力，但研究發現，學生對一般化的認識、創造正確說明和驗證的經驗是困難的（陳嘉皇，2006，2007，2013；Blanton & Kaput, 2002）；有關樣式活動的檢驗也顯示，學生雖能辨識多元樣式表徵，但無法獲得有用的代數式進行一般化（Blanton & Kaput, 2002）。有關圖像表徵對學生解題的表現，Rivera（2010）主張，圖像可促進學生一般化能力的發展。Steffe（1992）的研究也發現，圖像可促進學生對於數列概念的一般化。然而，上述學者的研究重點均集中於圖像的應用，並未擴及到與文字或符號等其他表徵的比較，有關何種表徵對一般化的促進作用孰優孰劣亦未探討。

近來，研究者也重視學生在離散與連續形式問題的一般化能力發展。Nathan與Kim（2007）研究發現，學生在連續樣式的一般化表現（線段圖形與語文規則），與離散樣式的表現（點狀圖形）相較，具明顯的優勢，亦即學生較容易產

出正確的一般化。但Nathan與Kim也發現，雖然離散資料的樣式會引導學生對抽離的概念產生質疑，但一些學生在解題歷程中會因資料的特徵而出現「插入」作業環境的策略（即在兩變數間插入一數字，連結變數完整的關係），由於這些離散特徵的影響，反而強化了學生以身體和知覺為主的推理本質。由Nathan與Kim的發現可知，連續和離散特徵設計的數學問題會影響學生一般化的表現，若要應用在一般化活動的設計，可先行呈現連續資料特徵的樣式，培養學生辨識、發現變數關係的能力，然後藉由離散資料特徵的樣式，激發學生轉換與解題的表現。

一般化的展示需具備理解表徵及操弄變數的能力，若要有效學習代數概念，只有當不同的、合適的表徵伴隨它們之間的關係進行轉換與結合，才有可能發展。數學教育目標必須培養學生以不同的表徵系統來發展，學習如何從觀察外在顯示的現象進行推論，並加以解題。根據上述文獻探討得知，學生一般化的表現在文字或語言設計之問題較佳，其他表徵的問題則讓學生感到困難、甚至混淆。國內學生的表現是否也與上述學者的發現一致，抑或有不同的結果，則仍待後續探討。

參、研究方法與步驟

本研究採調查法進行資料蒐集。由於表徵與學生一般化表現具有密切關聯，為瞭解國小五、六年級學生一般化的表現，研究者以自行編製的作業進行調查，比較其間是否有顯著差異存在。再者，為探討何種表徵問題較適合學生一般化學習與應用，本研究從問題表現的比較來推測學生應用的難易度。此外，為瞭解各種表徵問題可提供何種助益的特徵，協助學生一般化，研究者於調查結束後再選取六位學生進行結構性訪談，從訪談內容抽離相關要素。研究架構如圖1。

一、研究對象

樣本以立意抽樣方式選取，受試者為臺灣地區10所公立國民小學五、六年級學生，共423人（五年級為192人、六年級為231人），參與一般化作業調查。參與研究之國小皆屬都會型學校，規模中型，全校約為40至60班左右，五、六年級各有七班以上，研究者從這些學校中各取五、六年級一班學生（總計20班）進行

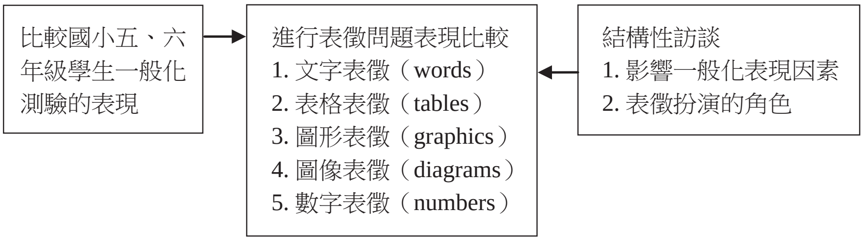


圖1　本研究架構圖

施測（每班人數約22至28人），學生家長社經地位中等，普遍為小康家庭，大多從事商業、工業。學童數學成就表現中等，班級導師大多採用講述法配合問題練習教學。研究進行時，五年級學生尚未接受任何有關以常用的數量關係，列出適當算式進行解題，或在比例的情境及幾何公式中，透過列表的方式認識變數，但能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題的經驗；而六年級學生除能以常用的數量關係列出適當算式進行解題外，尚能用中文簡記式表示物件結構的公式。

為瞭解不同表徵問題之特徵如何影響學生一般化，研究者於調查結束後，針對參與測驗之學生，依照其所屬行政區域（三個區域），每一行政區域隨機抽取六名自願接受訪談的學生（五、六年級各三人，以A1、A2、A3、B1、B2、B3命名之，A1與B3為女生，其餘四人為男生）進行結構性訪談。選擇這些學生的主要考量為：（一）訪談時期，這些學生恰好有空堂時間可配合研究者進行訪談；（二）他們可對一般化測驗的反應加以描述說明，協助研究者推論與理解一般化歷程的行動。

二、研究工具

研究者整合Goldin（1998, 2003）以及Goldin與Kaput（1996）提出之表徵定義與其特徵，設計文字、表格、圖形、圖像與數字等五種表徵問題（如附錄）之「一般化測驗」，問題中的變數資料融入Nathan與Kim（2007）建議的連續與離散形式呈現。各表徵問題之定義與特徵如表1。

由於學生進行不同表徵一般化問題的解題需經發想、推理與歸納的歷程，花費時間較長，考量評量時間、學生作答耐力與問題多樣性的限制，因此，將每

表1
一般化各表徵問題測驗之定義與特徵說明

試題題號與表徵類型	定義	問題特徵
1. 文字遞增 6. 文字遞減	運用語言文字陳述的方式，呈現問題情境中變數的意義及其間的關係	變數以連續遞增或遞減方式呈現
2. 表格遞增 3. 表格遞減	將問題中相關變數以表列方式呈現其間數量的變化關係	變數以連續遞增或遞減方式呈現
4. 圖形遞增 5. 圖形遞減	將問題情境中之變數以座標圖形方式呈現其間數量的變化與關係	變數以連續遞增或遞減方式呈現
7. 圖像線性數列題 8. 圖像二次函數題	將問題中的物件以幾何圖像結構方式呈現數量的變化與關係	物件以連續遞增之幾何圖像呈現
9. 數字線性數列題 10. 文字二次函數題	以未知數或數列方式呈現問題發展的趨勢及其間變數的關係	數字以連續遞增方式呈現

種表徵問題各設計兩子題，採取對照比較的方式，以兩項特徵呈現：一部分題目中數量的變化採取遞增方式呈現（試題1、2、4），另一部分則採遞減方式出現（試題6、3、5）。以往的研究大多探討學生於變數遞增情境的反應，研究者鑑於進行一般化解題時，亦應有逆向思考能力之表現，為擴展先前研究範圍，因此納入變數遞減的問題，這些問題經預測結果發現，學生能接受且有良好表現。另外，因圖像和數字表徵之一般化問題難以變數遞增減的方式呈現，所以，將試題7與9的問題採線性數列的方式呈現，相對的試題8與10則以二次函數方式呈現；這四題問題除提供視覺變化的線索外，變數的數目亦加以限制，讓學生能以其認知和經驗加以思考解題。此設計的用意在於協助明瞭問題中資料呈現的特徵與變化的趨勢，是否會影響學生一般化表現。

另為激發學生一般化解題表現，研究者參酌Dreyfus（1991）與Kaput（1998）有關一般化的定義：一般化的歷程是個體對物件特性加以觀察、連結以產生合宜規則，進而利用此規則解題與應用的歷程，將每道問題設計成五小題，分別包含（一）近程推理、（二）遠程推理、（三）符號連結、（四）解題及（五）應用等陳述，要求學生依據問題描述進行解題，以瞭解受試者解題歷程展現的一般化相關能力與技巧。其中，遠程推理是要求學生逐步抽離情境（問題中

的數量呈現離散現象），能對未知的數量關係加以推理。此設計可指引學生依照線索提示，從已知的條件逐步擴展至未知的範圍，其推理可呈現線性的演化，亦即學生在某子題發生錯誤，其後的子題答案亦會產生錯誤，由此可讓評分者做正確的判斷。另外，符號連結則是要求學生能夠利用符號，例如：英文字母A、B、X、Y等，表示問題情境中固定變化的變數，連結變數之間關係形成結構，亦即要求學生進行規則的建立；解題與應用則要求學生對所建立的規則加以檢驗、應用與擴展。如此設計可協助學生明瞭及推論學生一般化發展的層次。有關問題陳述與學生需呈現之一般化能力，整合如表2。

表2
一般化問題陳述與要求之能力

解題進程	問題陳述內容	呈現之一般化能力
近程推理	按照這種方式每星期固定把錢存入郵局，小玉在第10個星期時，會存多少錢？	理解題意，進一步將變數之間的關係予以近程擴展延伸
遠程推理	請你推測小玉連續要存幾個星期的錢，郵局的存款才會有8,000元？	結合變數發展趨勢，進一步將變數之間的關係予以遠程擴展延伸
符號連結	小玉存了A個星期的錢後，郵局的錢是7,200元，A的答案是幾星期？	利用符號呈現變數特性或關係，進行抽象思考
解題	小玉存了30個星期的錢後，郵局的錢是M元，M的答案是？元	形成運算規則進行解題
應用	小玉如果存了B星期的錢，郵局的錢總共有D元，想一想，用一個算式表示D和B的關係。	以列算式的策略呈現問題結構，進行思考解題，並應用於較複雜之案例。

學生針對提供的問題，經文本閱讀後，可依據認知與學習經驗逐步解題，最後呈現算式以表示問題結構並擴展應用。每一子題答對可得1分，錯誤或未答者以0分計算，每題最多可得5分，每種表徵（各兩題）合計10分，最高總分為50分。得分愈高，表示其對一般化測驗的表現愈佳。試題經由主成分分析後，得到文字表徵試題（1、6）因素分析值為.84；表格表徵（2、3）為.85；圖形表徵（4、5）為.84；圖像表徵（7、8）為.80；數字表徵（9、10）為.84。全部試題之KMO值為.90，Alpha值係.82。據此，本測驗為一良好之試題，可客觀測量學

生一般化的表現。

本研究亦包含訪談，協助理解影響學生一般化表現的原因及表徵對解題提供的特徵，每位學生接受訪談時間約為30分鐘：

（一）描述你在這道問題裡看到了什麼？

（二）此問題中的數字（量）規律如何變化的？

（三）這個問題中，什麼東西會改變，什麼還會保持一樣？從哪裡得知？

（四）你會採用何種方法解題？為何要用這種方法，是什麼理由？

（五）你還會利用什麼方法解決這道題目？你是怎麼想到的？

（六）你覺得不管採用的方法是什麼，得到的結果都相等？

（七）這個問題為何會產生錯誤？是什麼原因？

（八）解這個問題時，你覺得哪些地方會有困難？為什麼？

三、資料蒐集與分析

本研究重點在於呈現學生於表現問題的思考，因此，研究方法採取質量混合的方式來詮釋，希冀量化結果能簡單且清楚地呈現各種類表徵表現的差異，此部分資料利用t考驗比較五、六年級學生一般化表現是否達到顯著水準（$\alpha < .05$）。另將學生在不同表徵問題的表現，採取成對樣本t考驗方式加以比較，從各表徵問題的表現研判學生對表徵問題一般化的難易程度。再根據學生訪談的內容予以轉譯、整理、分析及歸類，形成研究結果。為使研究具良好之信、效度，在信度上採用兩種策略：（一）資料的真實性：對資料的呈現以測驗和訪談紀錄為依據，詳實予以量化或轉譯成逐字稿；（二）與研究人員討論修正：研究者於研究過程中與兩位在職國小教師及共同主持人（數學教育學系教授）進行討論修正，以避免主觀偏見。例如：問題中之數字不宜太大，以免計算時耗時費力影響到解題效果。在效度的提升上，則採取：（一）研究人員之三角檢定：研究過程中及資料蒐集後之轉譯分析，研究者與其他成員持續針對資料進行分析討論，以提供研究者不同面向之思考，減少研究者疏失及主觀偏見，並取得共識。例如：試題3彈珠問題，學生對於列出的式子應為$800 - 20B = D$，採用不同的符號代表變數像是$800 - 20A = C$，或是$800 = D + 20B$時，皆同意答案是正確的；（二）資料來源的三角校正：研究者運用回溯法獲得之轉譯稿資料、錄影（音）、學生一

般化測驗表現進行交叉比較與檢驗，目的是希冀能運用豐富及多元資料檢驗學生的表現。

四、實施步驟

本研究參考文獻編製一般化測驗相關問題，經過討論、修正後，於2012年2月至10月期間進行。施測期間，鼓勵學生選擇和利用各種解題技巧呈現其對問題的思考，測驗活動結束則進行學生訪談，每位學生約為30分鐘。訪談活動皆予錄影（音），俟研究結束，即整理相關資料進行分類、統計，繕寫結果。

肆、研究結果與討論

本節分為學生一般化測驗表現分析、表徵問題難易度比較分析，以及學生一般化解題訪談內容分析等三部分加以討論說明。

一、學生一般化測驗表現分析

有關學生一般化測驗的表現，如表3。五、六年級學生的一般化表現有顯著差異存在（13.68 < 17.94，$t = -4.41$，$p < .001$），六年級學生一般化的表現較五年級學生佳，亦即在本研究裡，學生一般化的表現隨著年級增加其表現愈佳，此項假設可獲得支持。從各試題加以分析得知，五、六年級學生除於試題3（平均數1.75與1.99）和試題5（平均數1.10與1.38）的表現無顯著差異外，其餘試題的表現皆呈現顯著差異。探討產出此結果的原因在於，六年級學生的數學概念較五年級學生深厚，理解能力較強，且解題經驗較為豐富，所以在各測驗問題上，其一般化表現較佳。學生一般化之表現情形，與其年齡和經驗有密切關係存在。五、六年級學生於試題3和試題5的表現無顯著差異，研究者推論原因可能是：（一）這兩道試題屬於資料遞減方式的問題，五、六年級的教科書較少出現此種類型題目，學生較為缺乏處理此類試題的經驗，所以五、六年級學生在此表現差異較小；（二）試題3和試題5這兩道試題呈現的變項屬於離散方式的資料，學生閱讀文本時，經常會忽略變項之間屬於非連續數量變化的關係，以致解題常會產生錯誤，所以五、六學生皆表現不佳，彼此之間的差異較不顯著。

表3

五、六年級學生一般化測驗表現比較統計分析

試題項目	年級	平均	標準差	*t*值
整體測驗	五	11.68	9.22	−4.41***
	六	15.94	10.65	
1. 文字遞增	五	1.69	1.51	−3.63***
	六	2.25	1.69	
2. 表格遞增	五	1.76	1.49	−4.19***
	六	2.41	1.76	
3. 表格遞減	五	1.75	1.75	−1.33
	六	1.99	1.89	
4. 圖形遞增	五	1.57	1.59	−4.62***
	六	2.33	1.82	
5. 圖形遞減	五	1.10	.56	−1.70
	六	1.38	1.78	
6. 文字遞減	五	1.03	1.47	−2.75**
	六	1.47	1.83	
7. 圖像線性數列	五	1.04	1.65	−3.48**
	六	1.58	1.50	
8. 圖像二次函數	五	.45	.56	−2.83**
	六	.80	1.47	
9. 數字線性數列	五	.71	.86	−2.09*
	六	.90	.98	
10.數字二次函數	五	.58	.97	−2.39*
	六	.83	1.20	

$^{*}p < .05$. $^{**}p < .01$. $^{***}p < .001$.

另從問題資料變化的趨勢特徵進行分析，結果顯示，學生在資料遞增變化或線性數列（試題1、2、4、7與9）的問題上，五年級總分為6.23，六年級學生總分為8.61，其一般化表現皆較以資料遞減或二次函數方式的問題（試題6、3、5、8與10）表現佳，五年級總分為5.45，六年級學生總分為7.33。研究者探討其原因有二：（一）遞增與線性數列的題目相對於遞減和二次函數的問題對學生而

言，前者在解題經驗上較為熟悉與豐富，因此表現較佳；（二）與學生認知發展有關：對於加法與線性數列的問題，學生根據提供的參照資料，掌握變數的關係往上加或推演即能解題，但後者除需理解問題結構意義，尚需對變數之間的關係加以推論及轉換，所需認知資源較多，因此表現較差。

另從一般化歷程表現顯示，大部分學生對問題僅能展現近程推理與遠程推理的能力（平均數低於2），而對符號連結、解題與應用等進階能力的表現則不佳，此顯示出大多數五、六年級學生一般化的展現，僅能遵循問題中呈現的數據及線索進行演算，對於超乎問題範圍外的要求，例如：符號連結或歸納等行動，則感到困難，亦即學生能辨識和運用各問題中的變數，但若要組合其關係並加以擴展則顯不易，此現象與Dreyfus（1991）的發現相同，即學生雖可辨識問題中表徵呈現的變數意義，卻無法根據變數發展的脈絡歸納問題的結構和規則。

二、表徵問題難易度比較分析

學生在各表徵問題一般化表現比對資料，如表4。

表4

五、六年級學生各表徵問題一般化表現比對分析

	五年級			六年級		
比較項目	平均數	標準差	*t*值	平均數	標準差	*t*值
文字—表格	2.71 3.51	2.44 2.74	−4.82***	3.72 4.40	2.97 3.14	−3.94***
文字—圖形	2.71 2.67	2.44 2.74	.26	3.72 3.71	2.97 3.06	.03
文字—圖像	2.71 1.49	2.44 2.20	7.74***	3.72 2.38	2.97 2.35	8.21***
文字—數字	2.71 1.29	2.44 1.52	8.97***	3.72 1.73	2.97 1.85	11.23***
表格—圖形	3.51 2.67	2.74 2.74	5.12***	4.40 3.71	3.14 3.06	3.95***
表格—圖像	3.51 1.49	2.74 2.20	15.12***	4.40 2.38	3.14 2.35	11.73***

（續下頁）

	五年級			六年級		
比較項目	平均數	標準差	*t* 值	平均數	標準差	*t* 值
表格—數字	3.51	2.74	16.44***	4.40	3.14	14.38***
	1.29	1.52		1.73	1.85	
圖形—圖像	2.67	2.74	6.02***	3.71	3.06	7.63***
	1.49	2.20		2.38	2.35	
圖形—數字	2.67	2.74	7.50***	3.71	3.06	10.76***
	1.29	1.52		1.73	1.85	
圖像—數字	1.49	2.20	1.05	2.38	2.35	3.76***
	1.29	1.52		1.73	1.85	

***$p < .001$.

表4資料顯示，五、六年級學生在各問題的反應大致一樣，皆在表格表徵的問題表現最佳，其次是文字與圖形表徵，再者為圖像表徵問題的表現，而數字表徵對學生而言最感困難。五年級學生在各類表徵問題平均分數分別為3.51 > 2.71 > 2.67 > 1.49 > 1.29，文字表徵和圖形表徵兩者之間無差異存在（t = .26，p > .05），圖像表徵和數字表徵兩者之間的表現亦無差異存在（t = 1.05，p > .05）；六年級學生在各類表徵問題平均分數分別為4.40 > 3.72 > 3.71 > 2.38 > 1.73，其中文字表徵問題與圖形表徵問題兩者之間無差異存在（t = .03，p > 05）。

此研究發現與多位學者的結果不同（Friel et al., 2001; Koedinger & Nathan, 2004; Nathan & Kim, 2007），他們研究呈現學生在文字表徵的一般化效果較佳，本研究則明顯是以表格表徵的一般化表現較佳。至於為什麼學生在表格表徵表現最佳，研究者推論，因為一般化的養成需能抽離問題中變數之間的關係，形成規則解題，而表格表徵的問題在文本上會同時呈現物件及數字變化的趨勢，學生透過視覺化即可直接進行物件與其關係的配對、比較及推理（類似有利於一般化發展的「函數思考」），形成對問題中變數的結構心像，較容易理解變數的關係，因此一般化的表現較佳。而文字或圖形表徵雖在文本中亦可說明或展示變數發展的趨勢，但學生解題歷程需先理解文本的意義，然後將這些敘述轉化成數量關係，再將變數加以比較、配對產出規則，此歷程所需的認知資源較多，較不易正確解題；此外，在圖像表徵上，學生需將圖像表徵呈現的物件轉換成數量關係進

行推理，轉換物件成數量關係，亦需運用計數或分割圖像成典型幾何圖形，再建立樣式結構的關係，因此，與表格、文字或圖形表徵的問題相較，需用到更多認知資源，所以一般化表現不佳。當學生面對數列問題時，由於這些問題是抽離情境的，解題時需先從數列中數字的排列加以辨識與分析其變化趨勢，進一步推論與檢驗其歸納的規則，才能正確表達與呈現問題的結構，在這些步驟上即需充分的認知資源才能成功擴展和應用，在大量認知負荷下，學生解題表現就較差。

從學生在各表徵一般化表現的比對，可提供教師一般化教學實施與課程設計的要點，亦即一般化教學的順序以視覺化的教材為先，提供可對照、推演關係發展的變數，激發透過辨識與比對方式，協助對樣式的發想和規則產出，所以可先以表格表徵問題的文本提供學生學習；其次，當熟悉一般化的要點後，可轉化成文字和圖形表徵的問題，進一步要求學生展現推理和連結變數的能力和技巧，促進問題結構中變數關係的建構；再者，導入圖像與數字表徵問題，鼓勵學生嘗試連結、擴展等一般化步驟的應用。此課程設計與教學之進展是依據認知發展及表徵之特徵而建議，符應Dreyfus（1991）所主張，問題設計的重點必須放在多元表徵的發展與連結，以一般化做為重點，而不單放在建構變數意義的表徵，忽略表徵的轉化，致使學生無法連結問題情境的結構。

三、學生一般化解題訪談內容分析

以下以六位學生在資料遞減呈現或二次函數的問題（試題3、5、6、8與10）訪談內容加以分析。選擇這些試題，一方面是考量學生對這些表徵設計的問題，較不易應用固有的思考模式解題，若要成功解題，則需深入分析問題結構的關係，採用思考、推理和歸納的技巧，而此行動正可提供研究者瞭解其一般化的表現；其次是這些學生在五項問題的表現並不一致，學生對提供的問題作答並非全部正確（除A1與B3外），有些會產生錯誤的反應，可見不同的表徵對學生一般化的表現有不同的影響，訪談資料可提供瞭解及比較各表徵對一般化表現的影響特徵。學生在各問題的得分如表5。

表5
學生在各表徵問題測驗之得分統計

問題 / 學生	問題3（表格）	問題5（圖形）	問題6（文字）	問題8（圖像）	問題10（數字）	總得分
A1	5	5	5	5	5	25
A2	5	4	4	2	3	18
A3	5	5	5	5	4	24
B1	5	5	5	4	2	21
B2	5	5	5	4	4	23
B3	5	5	5	5	5	25

（一）文字表徵一般化訪談分析

針對學生文字問題表現的訪談內容，研究者抽離出兩點影響學生一般化表現的要點：1.文字問題可協助對一般化變數的意義及其之間關係的理解；2.文字問題之描述容易轉化數學符號與變數之間的關係。以下為學生文字表徵問題一般化的表現（如圖2）與訪談的陳述。

1. 文字問題可協助對一般化變數的意義及其之間關係的理解

研究者詢問學生「此問題中的數字（量）規律如何變化的？」與「這個問題中，什麼東西會改變，什麼還會保持一樣？從哪裡得知？」問題後，學生的回應如下：

A1：題目裡面出現1分鐘放水25公升，2分鐘放水50公升，4分鐘放水100公升，5分鐘放水150公升，隨著分鐘增加，放的水就會增加。

A3：每分鐘固定放水25公升，所以2分鐘會放水50公升，4分鐘放水100公升，從題目的說明，6分鐘放水150公升，8分鐘放水200公升，等到一個時間後，水就會放完。

B1：題目裡面左邊呈現幾分鐘，然後放水幾公升，我看到他說每分鐘固定放水25公升，4分鐘是100公升，6分鐘中就是150公升，時間越長放的水越多。

B2：每分鐘放水25公升，6分鐘放水150分鐘，經過多少時間放的水可

以用幾分鐘乘以25算出來，經過4分鐘放的水是25 × 4 = 100，6分鐘放的水是25 × 6 = 150，10分鐘就是25 × 10 = 250。

B3：題目裡呈現時間越久，放的水量越多，而且每分鐘固定放水25公升，所以經過幾分鐘放水多少？可以將花的時間乘上25就可以算出答案。

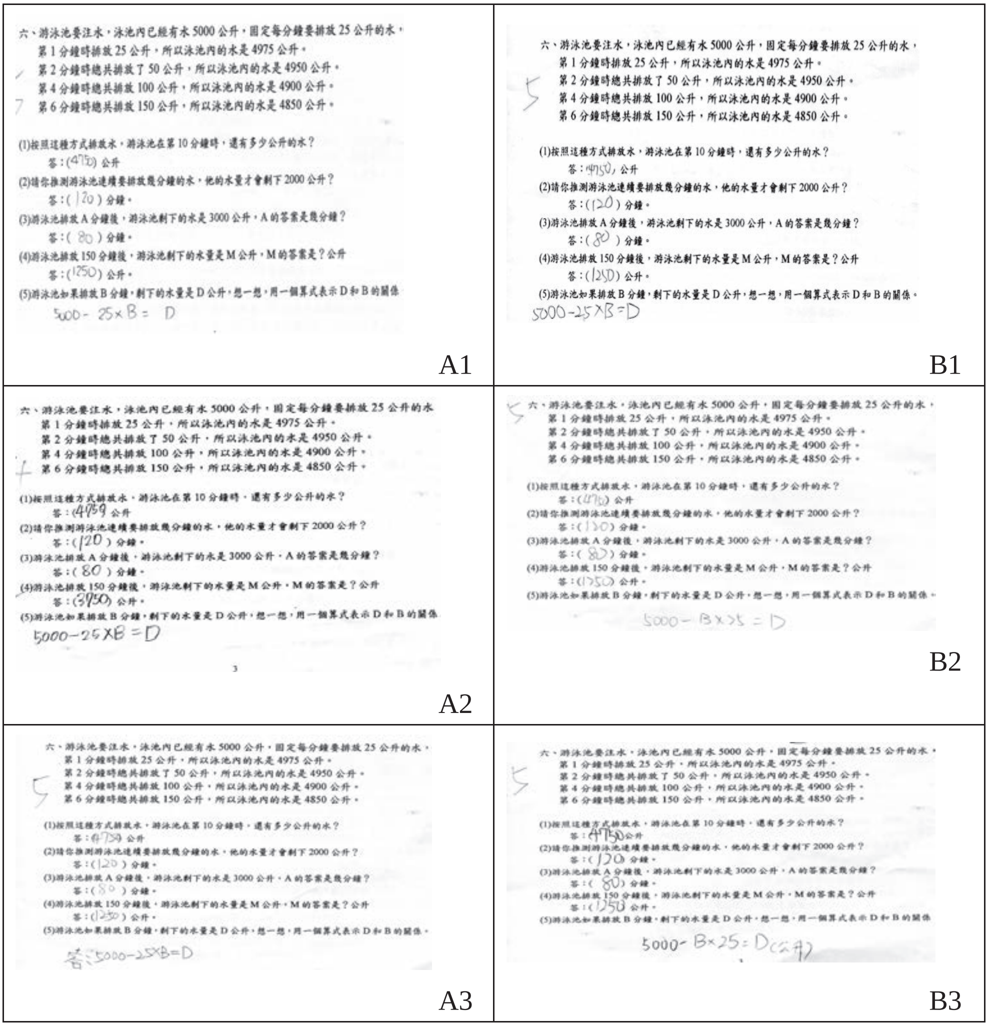


圖2　學生對文字表徵問題一般化作業之表現

由說明顯示，文字問題的敘述可呈現相關變數的關係，提供學生對照、比較的線索，進行一般化推理與思考，建構變數之間結構發展的關係。例如：此問題呈現的說明，讓學生明瞭「時間」、「放水」和「水量」等變項之間的關係，時間愈長，放水的水量就愈多，最後泳池的水就會放完，而放掉的水量可以時間乘以每分鐘固定放的水量求出答案。

2. 文字問題之描述容易連結數學符號與變數之間的關係

研究者詢問學生「利用問題中的英文符號呈現時間及水量的關係，你會怎麼做？」及「說明你如何利用發現的規則解題？」問題後，學生的回應如下：

A1：每分鐘已經知道固定放水25公升，泳池剩下水3000公升表示放了2000公升的水，將放掉的水量除以25就知道經過幾分鐘，2000 ÷ 25 = 80。

A2：幾分鐘放多少水就用25 × A表示，原來泳池有水5000，減去25 × A的水就是泳池剩下的水。

B1：經過A分鐘，放掉的水就用25 × A算出來，剩下M公升的水，M的意思可以用5000減去25 × A算出來水量。

B2：剩下的水量可以用5000減去25 × 幾分鐘放掉的水，因為每分鐘固定放水25公升，10分鐘放掉的水是25 × 10 = 250，剩下5000－250 = 4750。

B3：放掉的水可以用25 × A表示，A指的是幾分鐘，剩下的水可以用5000－25 × A算出來；要知道放幾分鐘，就用放掉的水量除以25就知道答案。

上述學生的說明顯示，文字問題的說明協助學生明白及連結問題中變數之間的關係，讓學生瞭解符號代表的意義，例如：A代表「時間」，M代表「剩下的水量」，並利用他們進行解題。文字表徵的問題提供學生題意及變數結構關係的說明，學生若對文字表徵問題的說明不清楚或不瞭解，那麼在一般化初始階段就會產生錯誤或困難。本研究中，A2學生忽略M代表的意義，所以在開始作答時呈現出「放掉的水量」表示「剩下的水量」，訪談時即加以修正。

（二）表格表徵一般化訪談分析

圖3為學生表格表徵問題一般化的表現，研究者針對訪談內容抽離出影響學生一般化表現的要點如下：

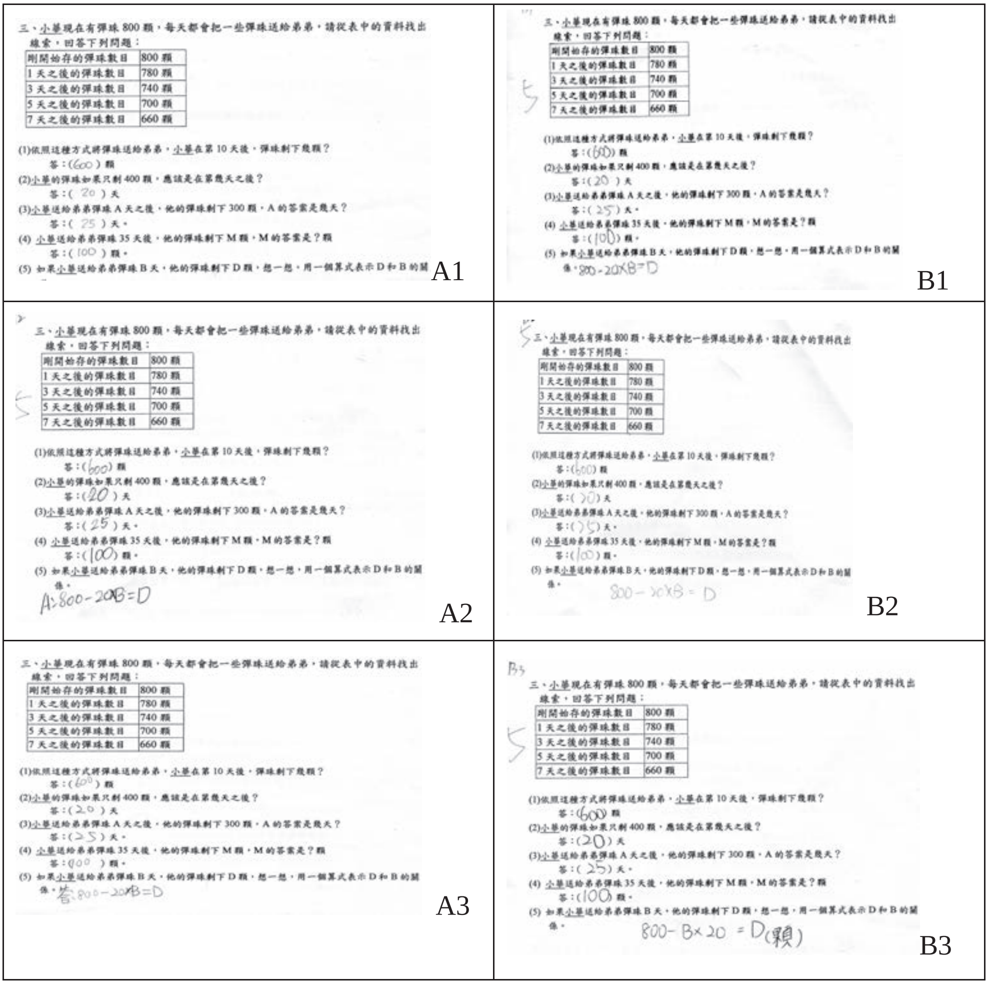


圖3 學生對表格表徵問題一般化作業之表現

1. 表格問題提供變數對應變化趨勢的資訊，利於視覺化的判斷

研究者詢問學生「此問題中的數字（量）規律如何變化的？」與「這個問題中，什麼東西會改變，什麼還會保持一樣？從哪裡得知？」問題後，學生的回應如下：

A2：第1天剩下780顆彈珠，第3天剩下740顆彈珠，第5天剩下700顆彈珠，第7天剩下660顆彈珠，表示2天用去40顆彈珠。

A3：原有800顆彈珠，第1天剩下780，表示每天用去20顆彈珠，2天就會用去40顆彈珠。

B1：這個表左邊是1、3、5、7的方式，右邊是780、740、700、660的方式呈現，表示2天用去40顆彈珠，那麼9天時就會是620，1天固定會用去20顆彈珠。

B3：這個題目可以知道每2天會用到40顆彈珠，用減去40的方式可以知道第9天剩下620顆，第幾天剩下幾顆可以用減去40的方式算出來。

學生的說明顯示出，表格問題呈現的資料可協助學生觀察而瞭解變數變化的趨勢，進而推演更遠問題可能的答案，例如：學生觀察表格資料，掌握「2天用去40顆彈珠」此固定變化，利用此發展趨勢配合表格左右欄位資料的對照，推演第9天或第11天剩下的彈珠。

2. 透過表格對應變數發展現象的觀察，容易瞭解問題結構的關係

學生如何整合成結構的關係？研究者詢問相關問題後，學生的回應如下：

A1：2天用去40顆彈珠，1天就是用去20顆彈珠，A天用去的彈珠就用20 × A算出，剩下的彈珠就用800去減A天用去的彈珠。

A2：表格呈現的彈珠是2天少40顆彈珠，一天少20顆彈珠，800彈珠以這樣的方式減少，800 ÷ 20 = 40，40天就會用完，幾天用多少顆彈珠，用20去乘以幾天就能算出答案。

A3：每天用去20顆彈珠，A天就用去20 × A，剩下的彈珠就用800減他

就可以了。

B2：剩下的彈珠是用800減去20 × A，A表示幾天，A天用去的彈珠就是20 × A。

B3：每天用去20顆彈珠，A天就用去20 × A顆彈珠，剩下的彈珠就用800去減；用掉多少彈珠需要幾天，就用用掉的彈珠數量除以20就可以算出幾天。

學生的說明顯示，表格問題呈現之資料變化趨勢讓學生瞭解「天數」、「每天用去的彈珠數量」與「原有彈珠數量」之間的關係，藉由表格資料的對應及比較，很容易連結這些變數的關係，順利推演或運算欲解的答案。

（三）圖形表徵一般化訪談分析

圖4為學生圖形表徵問題一般化的表現，研究者針對訪談內容抽離出影響學生一般化表現的要點如下：

1. 圖形表徵提供變數發展趨勢比對的脈絡

研究者詢問學生「此問題中的數字（量）規律如何變化的？」與「這個問題中，什麼東西會改變，什麼還會保持一樣？從哪裡得知？」問題後，學生的回應如下：

A1：這個圖形的黑點往下斜，表示剩下的距離越來越短，每個點和每個點相差100公里，100公里是2天所騎的，一天是騎50公里。

A2：我把左邊的地方每格加上2天，變成9天、11天、13天……，因為他每格相差2天，下面的部分則分別減去100變成950、850、750……，這樣看這個點，就可以知道第幾天的時候剩下多少公里的路。

B1：圖中顯示1個方格代表2天，騎了100公里的路，表示1天騎50公里，所以第1天就剩下1450公里，第3天剩下1350，第5天就剩下1250……，也可以用50 × 5 = 250，表示第5天騎了250公里的路，剩下1500 – 250 = 1250公里的路。

B2：每格代表2天騎的路是100公里，表示1天騎的路是50公里，A天騎

的距離就是50 × A，剩下的距離就用1500減去50 × A，剩下的距離還需騎多少天，就用剩下的距離除以50就可算出答案。

B3：100 ÷ 代表每天期50公里的路，A代表天數時，騎的距離是50 × A，剩下的距離就用1500 − 50 × A。

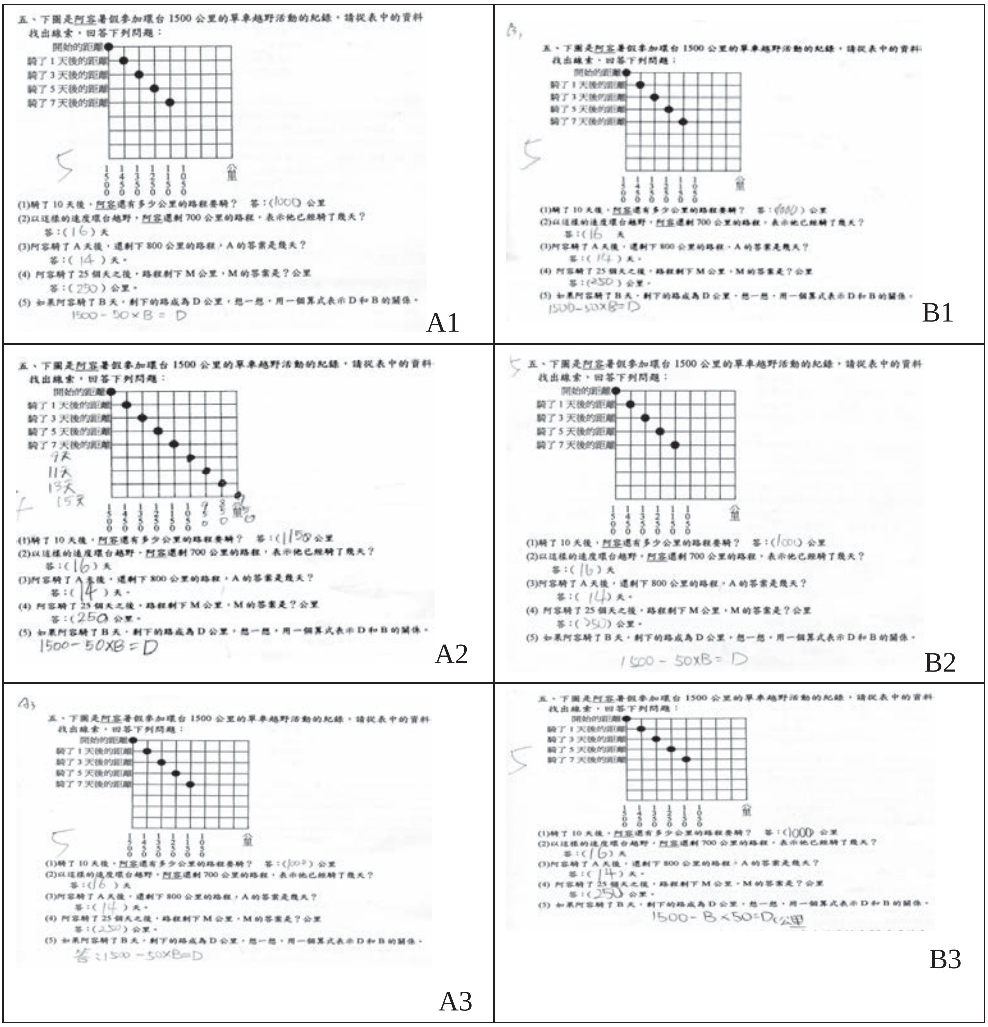


圖4　學生對圖形表徵問題一般化作業之表現

學生的說明顯示，圖形表徵的問題提供利用縱座標與橫座標對應的數據，進行比對與推理，因而得知兩天騎了100公里的路程，得到一天騎50公里的答案，透過圖中物件變化的趨勢，瞭解「騎的天數愈多，剩下的距離愈短」此關係，剩下的距離可由最初的距離減去騎過的距離獲得。學生需正確地連結圖形中對應位置的變數，否則容易產生錯誤。本研究中，A2學生解題開始時，誤以為座標第五個點顯示是騎了10天剩下距離的意義，對應的答案是1,150公里，雖然延伸縱座標與橫座標的物件協助其正確推理，但忘記回頭修正答案。

2. 圖形表徵引導解題步驟及答案的驗證

研究者詢問相關問題後，學生的回應如下：

A1：每天騎50公里的路，A天騎的路就是50 × A，剩下就用1500 − 50 × A。第9天就是1500 – 50 × 9 = 1050，跟這個點的答案一樣。

A2：每一格會少100公里，從圖裡看這個點，騎第15天時，剩下750公里的路，因為一天騎50公里，15天騎了50 × 15 = 750，所以剩下1500 – 750 = 1500。

B2：全部的距離減去騎的距離就是剩下的距離，騎了A天，剩下的距離用1500 − 50 × A就可以了。這個點應該在圖形的下面，15天剩750，17天剩下650…，23天剩350，25天剩250。

B3：1天騎50公里，A天總共騎50 × A公里，剩下的距離用1500減。全部減完要30天，騎了25天，表示剩下5天的距離要騎，50 × 5 = 250。

學生的說明顯示，圖形表徵問題中的對應數字，可引導學生利用此技巧進一步延伸座標位置的關係，推演與驗證「剩下的距離」等於「全部距離－騎過的距離」的解題方法與答案是否正確，提升學生自我監控的表現。

（四）圖像表徵一般化訪談分析

圖5為學生圖像表徵問題一般化的表現，研究者針對訪談內容抽離出影響學生一般化表現的要點如下：

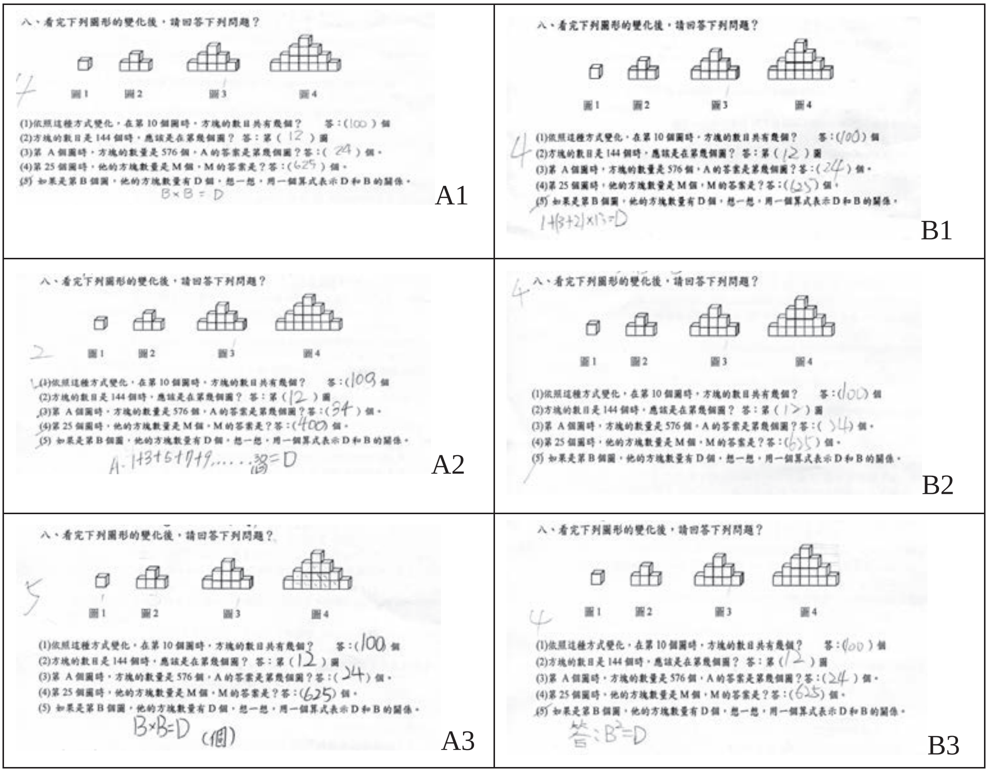


圖5　學生對圖像表徵問題一般化作業之表現

1. 圖像表徵問題中的物件圖像，可刺激學生轉化數量關係進行推理

研究者詢問學生「此問題中的數字（量）規律如何變化的？」與「這個問題中，什麼東西會改變，什麼還會保持一樣？從哪裡得知？」問題後，學生的回應如下：

A1：第1個圖是1個，第2個圖是4個，第3個圖是9個，第4個圖是16個，所以我想第5個圖應該是5 × 5 = 25個，第6個圖就是6 × 6 = 36個，第幾個圖有幾個方塊，就用號碼相乘去算。

A2：第1個圖1個，第2個圖是4個，第3個圖是9個，第4個圖是16個，第5個圖畫出來是25個……，第10個我畫出來是100個方塊，第12個

圖畫出來是144個方塊，其他的圖太多方塊了，我畫不出來只能用猜的。

A3：每個圖我數了方塊的數目之後，發現方塊的數目和第幾個圖有關，像第3個圖的方塊，就是$3 \times 3 = 9$，第4個圖的方塊就是$4 \times 4 = 16$，所以第10個圖的方塊應該是$10 \times 10 = 100$，第12個圖是$12 \times 12 = 144$。

B1：第1個圖1個方塊，第2個圖是$1 + 3 = 4$，第3個圖是$1 + 3 + 5 = 9$，第4個圖是$1 + 3 + 5 + 7 = 16$，所以第10個圖是$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 19$，總共是100；第12個圖是$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 19 + 21 + 23$，整共是144，第25個圖就用這種方式加上25個數字，總共是625，576剛好就是第24個圖的答案。

B2：按照圖裡的方格排列將數字加起來，第3個圖是加3個數字$1 + 3 + 5 = 9$，第4個圖是加4個數字$1 + 3 + 5 + 7 = 16$，第幾個圖就加幾個數字，最後加上的數字是第幾個圖乘以2減1，所以第25個圖是$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 45 + 47 + 49 = 625$，576剛好是$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 45 + 47 = 576$，所以是第24個圖的方塊數目。

B3：我發現每個圖把右邊突出的方塊往左邊移動，都會變成正方形，每個正方形每邊的數目和第幾個圖一樣，所以用正方形面積的公式就可以算出第幾個圖有多少個方塊，第25個圖的方塊是$25 \times 25 = 625$，$576 = 24 \times 24$，是第24個圖。

由於圖像表徵只提供物件的組合，若想根據圖像表徵進行一般化，則需將物件轉換成數量關係。由學生的說明顯示，為建構物件之間的關係，圖像表徵的問題激發學生進行發想，A1與A3採取物件數字與圖次關係的聯想，A2則藉由嘗試畫圖列出物件數目進行推演，B1與B2則列出數列加總數字進行變數關係的推理，B3則藉由圖像物件之切割移轉形成正方形而形成與圖次之間的結構關係。學生在此項表徵問題之一般化表現不佳，主要是因為要將圖像轉換成數量關係有其困難所在，但學生若有意願嘗試解題，圖像表徵可激發學生多元的發想觀念，促進其推理與臆測能力的發展。

2. 圖像表徵協助學生對問題結構發展的臆測與組織

研究者詢問學生相關問題後，學生的回應如下：

A1：我發現第幾個圖需要幾個方塊組合，就將第幾個圖的號碼乘以兩次就可以了，所以B代表第幾個圖的時候，所需要的方塊就用B × B就能算出答案。

A2：畫圖的方式太麻煩，我用面積的公式來算，但我不知道D和B要怎麼表示。

A3：因為B表示第幾個圖，所以第B個圖所需要的方塊就可以用B × B算出，因為第3個圖的方塊是3 × 3 = 9，第10個圖是10 × 10 = 100。

B1：我知道第幾個圖需要多少個方塊，列出數字可以加在一起然後算出總和就是答案，像是第25個圖需要多少方塊，就從1 + 3 + …加到第25次，加可以算出答案，但我不知要怎麼用公式表示。

B3：這些圖裡面的方塊其實可以變成正方形，第幾個圖時他的邊長就是這個圖的號碼，所以第B個圖所需要的方塊就用B2表示。

一般化產生的規則與發想的方向有關，當學生能正確掌握發想的方向，他將能導出正確的規則，進行有效的一般化。由學生之說明顯示，圖像表徵的問題除可激發學生多元的發想之外，另可導引學生進行物件之間關係的整合，形成有效規則，進行臆測與驗證。

（五）數字表徵一般化訪談分析

圖6為學生數字表徵問題一般化的表現，研究者針對訪談內容抽離出影響學生一般化表現的要點如下：

1. 數字表徵問題提供數字結構關係的推演

研究者詢問學生相關問題後，學生的回應如下：

A1：第1號的數字只有1，第2號變成1 + 2，第3號變成1 + 2 + 3，第4號變成1 + 2 + 3 + 4，依此類推第10號的數字就是由1 + 2加到10，總和就是55，可以用梯形面積公式算出答案，所以第A號的數字和就

是把1 + 2 + 最後數字是A，然後採用（上底加下底）× 高 ÷ 的方式算出總和，高就是A，也就是用(1 + A) × A ÷ 2，用這個方法去試，可以得到(1 + 15) × 15 ÷ 2 = 120，當15號時他的總和就是120。

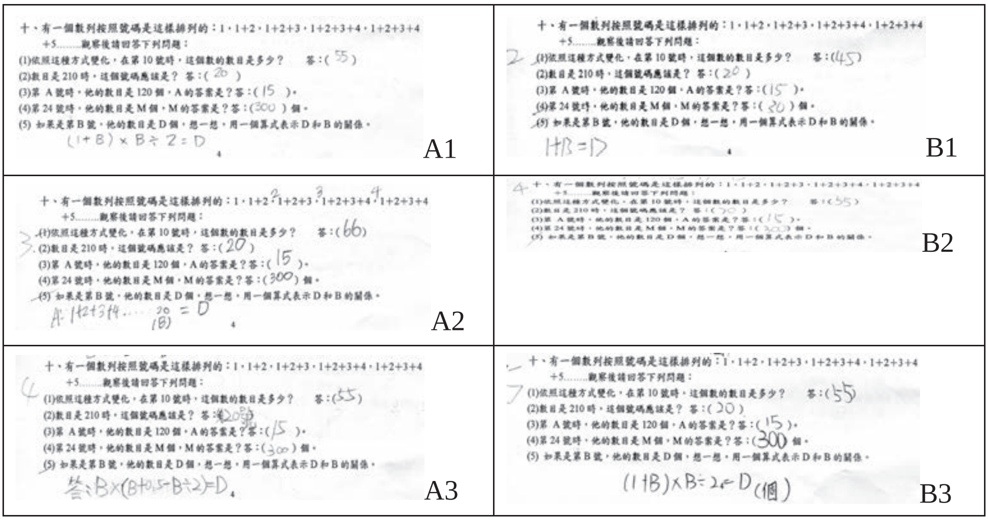


圖6　學生對數字表徵問題一般化作業之表現

A3：這是連續數字加起來的問題，第3號數字就是由1 + 2 + 3，第4號數字就是由1 + 2 + 3 + 4組成，由此類推，第A號的數字總和就是從1 + 2 + 3 + …A，再用梯形面積的公式計算就可以得到總和。

B1：我知道第幾號數字的總和就是由1開始連續加到第幾號的數字，但我忘記梯形面積的公式了，是不是1 + B，就是將1加上第B號的數字。

B2：這是連續整數加總的問題，第幾號的數字和就是由1連續加到第幾號，可以把他們全部加起來算，但我忘記怎麼用公式了。

B3：這些數列是三角形數，可以把他們想成是個三角形，利用兩個相反的三角形形成平行四邊形計算他的總和，第2號時三角形的底是2高是1，兩個相反的三角形合併成底是3高是2的平行四邊形，(2

+ 1) × 2 ÷ 2就是第2號數列的和，第3號數列可以用(3 + 1) × 3 ÷ 2 = 6，第10號數列就用(10 + 1) × 10 ÷ 2 = 55，第A號數列可以用(A + 1) × A ÷ 2算出答案，兩個連續的數字相成再除以2等於120，那麼這兩個數字是15和16，所以第15號數列的總和是120。

學生的陳述顯示，數字表徵問題容易激發學生對數字運算的發想，進而探究其結構關係，並思考利用先前學過之「公式」經驗進行解題。惟數字結構與「公式」之間概念的連結無效，即無法進行解題或產生錯誤答案。

2. 數字表徵問題的運算可轉換成公式進行，顯示一般化之重點

研究者詢問「利用問題中的英文符號呈現數列的號碼及整體數量的關係，你會怎麼做？」及「說明你如何利用發現的規則解題？」問題後，學生的回應如下：

A2：我知道每一個號碼的數字就是從1開始加到這個號碼，數字比較大的時候就要加很多的數字，很難算，所以要用公式，但是我不知道怎麼用公式。

A3：我判斷出這些數字和第幾個號碼有關，像是第10個號碼，就要從1加到10，以前學過梯形面積的公式，可以用（上底＋下底）× 高 ÷ 2的方式算出來，我只會用這個方法算答案。

B2：梯形面積的公式應該是（上底＋下底）× 高 ÷ 2，有時會忘記，像這種問題要把所有的數字加起來，不用公式會很難算出答案的。

B3：我用的方法是將這些問題想成是三角形，兩個三角形合起來是一個平行四邊形，用平行四邊形的公式也可以算出第幾個號碼是多少，他的底組合後是號碼的數字加上1，高和號碼一樣，這樣會比較好算。

學生的說明顯示，數字表徵提供的數列問題需要學生轉換成公式運算，才易獲得正確解答，否則運用繁雜計數程序將耗費大量認知資源。公式或規則的運用是一般化的重點，從學生的說明發現，若無法產出此規則，那麼解題將費時、甚

至產出錯誤。雖然學生在數字表徵問題的表現最差，然而，此種表徵問題方式凸顯出一般化規則產出之重要性，是培養學生一般化亟需強調的目標。

由學生在不同類型表徵問題的說明和行動，可將其對一般化表現的影響特徵彙整成表6。

表6

不同類型表徵問題影響學生一般化表現的特徵

表徵類型	影響一般化表現之特徵
文字問題	1. 協助對一般化變數的意義及其之間關係的理解 2. 問題之描述容易轉化數學符號與變數之間的關係
表格問題	1. 提供變數對應變化趨勢的資訊，利於視覺化的判斷 2. 透過表格對應變數發展現象的觀察，容易瞭解問題結構的關係
圖形問題	1. 提供變數發展趨勢比對的脈絡 2. 引導解題步驟及答案的驗證
圖像問題	1. 圖像表徵問題中的物件圖像，可刺激學生轉化數量關係進行推理 2. 協助學生對問題結構發展的臆測與組織
數字問題	1. 提供數字結構關係的推演 2. 問題的運算可轉換成公式進行，顯示一般化之重點

由表6內容得知，不同表徵問題對學生數學一般化發展有其重要的影響，根據學生對這些表徵問題的表現與解題說明，可歸納出一般化學習或發展的要點：1.表格、圖形與文字表徵的問題可適用於學生一般化歷程發想、問題的理解、變數的辨識、結構關係的連結和發展；2.圖像與數字表徵問題可激發學生對變數關係的發展加以推理與臆測，形成規則進行解題。研究者針對不同表徵對學生一般化發展提供助益的特徵進行分析，從學生一般化的反應，將這些表徵的特徵統整為學生一般化歷程各階段（如近程推理、擴展等）能力發展協助的要素，做為教師教學應用或激發學生數學一般化可掌握的重點，如此，將可讓學生從算術轉換至代數的學習更加平順。

伍、研究結論與建議

樣式一般化的議題對於國內代數思考的研究具有深遠的意義與重要性，本研究透過不同表徵問題測驗，探索學生進行一般化的表現，以及不同表徵問題如何提供相關的要點協助學生一般化，期盼研究結果可做為代數思考研究與教學發展的參考。歸納發現可獲得下列結論：

一、六年級學生一般化的表現較五年級學生佳，且有顯著差異存在。研究發現，六年級學生對於各類表徵問題的一般化表現皆顯著優於五年級學生，顯示成熟與經驗的因素影響學生解題的表現。因此，一般化教學的歷程要提升學生數學表現，須以上述因素做為基礎，在試題的設計與教學實施上應以滿足學生的認知發展為考量，提供適配的情境和表徵以激發學生一般化的學習。

二、五、六年級學生在各問題的回應呈現出表格表徵的問題表現最佳，其次是文字與圖形表徵，再者為圖像表徵問題的表現，而數字表徵則最感困難。

三、表格、圖形與文字表徵的問題可適用於學生一般化歷程發想、問題的理解、變數的辨識、結構關係的連結和發展；圖像與數字表徵問題可激發學生對變數關係的發展加以推理與臆測，形成規則進行解題。

本研究結果除瞭解六年級學生一般化表現較五年級學生佳、確認認知因素的影響之外，另根據學生在不同表徵問題表現之難易度，提供代數思考課程設計的要點、教學實施的順序或學生學習的軌道，協助教師掌握各表徵的特徵，配合一般化發展的進程，促進學生代數思考的成效。

Goldin與Kaput（1996）主張，表徵是「屬於已經高結構性的系統，是個人、文化和傳統的」的體現。所謂文化和傳統的表徵，可視為是數學，而個人表徵因為缺乏抽象性而無法被歸納，是學生用來解決問題的，並不屬於數學。雖然如此，學生透過個人的表徵利用類比或隱喻可以獲得數學知識，因此，表徵承載著物件與數學意義連結的任務。尤其是圖形與表格表徵對一般化的建構非常重要，因為它顯示呈現的資料與表達理論的關係，擴展學生數量關係的範圍及推理的形式。例如：本研究發現，學生在圖表表徵的一般化表現最佳，因為學生可利用個人的視覺將圖表中的橫與縱的座標資訊加以比對，配合教科書提供的報讀經

驗，將文本中的資訊逐步解析，呈現變數發展的趨勢線索而解題。表格的此種特徵可協助學生建立變數關係的連結，因此，建議教師可於一般化教學初始，提供做為學生視覺化線索的文本。

研究發現學生在圖像與數字表徵有關問題之表現不佳，此現象該如何改善？對此，除須考量成熟與經驗的因素，研究者建議在文本的設計上，可嘗試掌握圖像或數字表徵二次函數問題的方法，將它與表格、文字或圖形表徵配對連結，顯示當成實例，例如：轉換成圖形上的點或語文描述的表單，利用圖形上的直線或曲線，配合語文規則，採取整體的方式描述關係，加以比對、刺激對二次函數資料的考驗。因此，教學時呈現表徵的模式，可採取整合性的方式，配合語文和表格等不同的形式，共同描繪相關的範例。

另外，不同表徵設計的問題如何呈現其特徵呢？當然需要學生對一般化的問題做基本的要求，Friel等人（2001）檢驗學生對表徵的閱讀能力時，認為可從三個階段尋問學生問題：在初級階段，直接閱讀表徵中的資料，要能達成此階段目標，文本的資料應清晰明確，可讓學生運用視覺畫家以辨識和比對；在中介階段，重點是資料之間關係的閱讀，並導引出推論，所以，文本資料的變化趨勢應一致，可讓學生明顯地歸納出重要可用的代數規則；在最後階段，則是超越資料的閱讀，需將所有的資料化約成單一的說明或資料的關係，亦即學生可將文本歸納出的規則對問題結構關係加以說明，並能應用解題。這與Dreyfus（1991）強調學生需歷經對變數關係的連結，才能展現一般化的能力一樣，因此建議教師於代數思考活動時，應強調學生對問題中變數的辨識、關係的推理和臆測，方能有效建立變數之結構關係。

代數符號概念的形成和運用，配合Kieran（1996）提議的三個活動：表徵、轉換與後設活動，可針對國小階段的算術議題，透過各式表徵的運用，協助學生建立數字所欲展現的「真實意義」，再與代數符號和其結構結合、轉化及自動化。學生若能從所接觸的表徵活動，建立物件和符號意義的連結，掌握物件之間的關聯，則進入國中階段對代數式的運算和轉換將能順暢，且能運用符號做運算與思考解題，縮減算術與代數之間的間隙。惟表徵的應用、符號觀念的建立、等值意義的解釋與建構，都是影響學生代數思考發展的障礙來源。為支持學童算術至代數的轉化，其間表徵方式對一般化的影響需成為深入探討的重點，尤其是上

述提及的表徵資料如何閱讀、「表徵集合體」對代數思考的成效等議題，皆可再持續研究。

本研究統計分析採用*t*考驗處理資料，結果呈現顯著差異，依據本文的研究設計，應以ANOVA多因子變異數分析方式較為適宜，因為採用多次的*t*考驗，將造成α膨脹，無法呈現整體性的意義。另外，設計之各表徵題數只侷限於兩題，影響到測驗效度與代表性。針對一般化表徵問題有關統計分析方法和設計題數、內容變化，未來研究可再加以精進細緻。一般化問題對學生推理、臆測和證明能力的發展是重要的來源，考量試題編製不易，國內針對相關研究者應發展出相關題庫，未來在改編教科書或評量時才有相關論證基礎可供參考。

DOI: 10.3966/102887082014066002001

參考文獻

教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域**。臺北市：作者。

[Ministry of Education. (2003). *Grade 1-9 curriculum guidelines: Learning areas of mathematics*. Taipei, Taiwan: Author.]

陳嘉皇（2006）。國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例。**屏東教育大學學報，25**，381-412。

[Chen, C.-H. (2006). A study of apply strategies on algebraic reasoning: An example from cover and arrange grids to generalize mathematical equation. *Journal of National Pingtung University of Education*, *25*, 381-412.]

陳嘉皇（2007）。學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究：以三個個案為例。**國民教育研究學報，19**，79-107。

[Chen, C.-H. (2007). A study on the development process analysis of algebraic reasoning: Three examples from student's cardboard covering. *Journal of Research on Elementary and Secondary Education*, *19*, 79-107.]

陳嘉皇（2013）。國小六年級學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究。**教育科學研究期刊，58**（1），59-90。

[Chen, C.-H. (2013). Application of generalization schemas to solve figural pattern problems on 3 sixth graders. *Journal of Research in Education Sciences*, *58*(1), 59-90.]

Blanton, M., & Kaput, J. (2002, April). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper represented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking processes* (pp. 25-41). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Earnest, D., & Balti, A. A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school. *Teaching Children Mathematics*, *14*(9), 518-522.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principle and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the k-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics (Ed.), *The nature and role of algebra in the k-14 curriculum* (pp. 25-26). Washington, DC: National Academy Press.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Perez (Eds.), *Eighth international conference on mathematical education: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Science*, *13*(2), 129-164.

Nathan, M. J., & Kim, S. (2007). Pattern generalization with graphs and words: A cross-sectional and longitudinal analysis of middle school students' representational fluency. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 193-219.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, *4*(3), 259-309.

附錄

代數推理樣式一般化測驗試卷

學校：　　　　國小　　年　班 座號：　　號 姓名：　　　　性別：

一、小玉在郵局裡的存款有 2000 元，他計畫每星期固定要存款 200 元儲蓄，他做了以下的安排：

第 1 個星期存款 200 元，所以郵局的錢有 2200 元，
接著，第 2 星期再存 200 元，所以郵局的錢有 2400 元，
再來，第 3 星期也存 200 元，所以郵局的錢有 2600 元，
第 4 星期再存 200 元，所以郵局的錢是 2800 元。

(1) 按照這種方式每星期固定把錢存入郵局，小玉在第 10 個星期時，會存多少錢？
答：(　　) 元
(2) 請你推測小玉連續要存幾個星期的錢，郵局的存款才會有 8000 元？
答：(　　) 星期。
(3) 小玉存了 A 個星期的錢後，郵局的錢是 7200 元，A 的答案是幾星期？
答：(　　) 星期。
(4) 小玉存了 30 個星期的錢後，郵局的錢是 M 元，M 的答案是？元
答：(　　) 元。
(5) 小玉如果存了 B 星期的錢，郵局的錢總共有 D 元，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

二、下表是阿東觀察樹苗生長做的紀錄，請從表中的資料找出線索，回答下列問題：
樹苗生長高度觀察紀錄表

開始進行記錄時樹苗的高度	2 公分
第一天測量後樹苗的高度	5 公分
第二天測量後樹苗的高度	8 公分
第三天測量後樹苗的高度	11 公分
第四天測量後樹苗的高度	14 公分
第五天測量後樹苗的高度	17 公分

(1)根據上表的資料，推測在第 10 天後，樹苗的高度會變成幾公分高？
答：(　　) 公分
(2)樹苗以這樣的速度生長，它的高度 50 公分時，是在第幾天以後？ 答：(　　) 天
(3)樹苗生長了 A 天以後，它的高度 92 公分，A 的答案是幾天？
答：(　　) 天。
(4)樹苗生長了 40 天後，他的高度是 M 公分，M 的答案是？公分
答：(　　) 元。
(5)如果生長了 B 天後，樹苗的高度總共有 D 公分，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

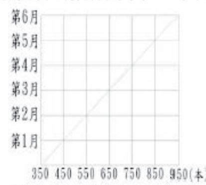
1

三、小華現在有彈珠 800 顆，每天都會把一些彈珠送給弟弟，請從表中的資料找出線索，回答下列問題：

剛開始存的彈珠數目	800 顆
1 天之後的彈珠數目	780 顆
3 天之後的彈珠數目	740 顆
5 天之後的彈珠數目	700 顆
7 天之後的彈珠數目	660 顆

(1)依照這種方式將彈珠送給弟弟，小華在第 10 天後，彈珠剩下幾顆？
答：(　　) 顆
(2)小華的彈珠如果只剩 400 顆，應該是在第幾天之後？
答：(　　) 天
(3)小華送給弟弟彈珠 A 天之後，他的彈珠剩下 300 顆，A 的答案是幾天？
答：(　　) 天。
(4) 小華送給弟弟彈珠 35 天後，他的彈珠剩下 M 顆，M 的答案是？顆
答：(　　) 顆。
(5) 如果小華送給弟弟彈珠 B 天，他的彈珠剩下 D 顆，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

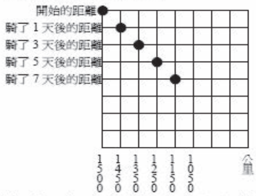
四、圖書館現在有圖書 350 本，每月要購買固定數量的自然科學書籍，以下圖形是購買圖書的紀錄，請從表圖中的資料找出線索，回答下列問題：



(1)依照這種方式購書，在第 10 個月時，圖書館的自然科學書籍共有幾本？
答：(　　) 本
(2)圖書館的圖書數量有 1850 本，應該是在第幾個月之後？
答：第 (　　) 月
(3)圖書館購書 A 個月之後，圖書的數量有 2750 本，A 的答案是幾個月？
答：(　　) 月。
(4) 圖書館購書 60 個月之後，他的圖書數量有 M 本，M 的答案是？本
答：(　　) 本。
(5) 如果圖書館購書 B 個月，他的圖書數量有 D 本，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

2

五、下圖是阿容暑假參加環台 1500 公里的單車越野活動的紀錄，請從表中的資料找出線索，回答下列問題：



(1)騎了 10 天後，阿容還有多少公里的路程要騎？　答：(　　) 公里

(2)以這樣的速度環台越野，阿容還剩 700 公里的路程，表示他已經騎了幾天？
　答：(　　) 天

(3)阿容騎了 A 天後，還剩下 800 公里的路程，A 的答案是幾天？
　答：(　　) 天。

(4) 阿容騎了 25 個天之後，路程剩下 M 公里，M 的答案是？公里
　答：(　　) 公里。

(5) 如果阿容騎了 B 天，剩下的路成為 D 公里，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

六、游泳池要注水，泳池內已經有水 5000 公升，固定每分鐘要排放 25 公升的水，
　第 1 分鐘時排放 25 公升，所以泳池內的水是 4975 公升。
　第 2 分鐘時總共排放了 50 公升，所以泳池內的水是 4950 公升。
　第 4 分鐘時總共排放 100 公升，所以泳池內的水是 4900 公升。
　第 6 分鐘時總共排放 150 公升，所以泳池內的水是 4850 公升。

(1)按照這種方式排放水，游泳池在第 10 分鐘時，還有多少公升的水？
　答：(　　) 公升

(2)請你推測游泳池連續要排放幾分鐘的水，他的水量才會剩下 2000 公升？
　答：(　　) 分鐘。

(3)游泳池排放 A 分鐘後，游泳池剩下的水是 3000 公升，A 的答案是幾分鐘？
　答：(　　) 分鐘。

(4)游泳池排放 150 分鐘後，游泳池剩下的水量是 M 公升，M 的答案是？公升
　答：(　　) 公升。

(5)游泳池如果排放 B 分鐘，剩下的水量是 D 公升，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

3

七、以下是黑點圖形的變化，請你觀察後，回答下列問題：

圖 1　圖 2　圖 3　圖 4？

(1)依照這種方式變化，在第 10 個圖時，黑點的數目共有幾個？　答：(　　) 個
(2)黑點的數目是 121 個時，應該是在第幾個圖？ 答：第 (　　) 個圖
(3)第 A 個圖時，黑點的數量是 241 個，A 的答案是第幾個圖？答：(　　) 個。
(4)第 100 個圖時，他的黑點數量是 M 個，M 的答案是？答：(　　) 個。
(5) 如果是第 B 個圖，他的黑點數量有 D 個，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

八、看完下列圖形的變化後，請回答下列問題？

圖 1　圖 2　圖 3　圖 4

(1)依照這種方式變化，在第 10 個圖時，方塊的數目共有幾個？　答：(　　) 個
(2)方塊的數目是 144 個時，應該是在第幾個圖？ 答：第 (　　) 圖
(3)第 A 個圖時，方塊的數量是 576 個，A 的答案是第幾個圖？答：(　　) 個。
(4)第 25 個圖時，他的方塊數量是 M 個，M 的答案是？答：(　　) 個。
(5) 如果是第 B 個圖，他的方塊數量有 D 個，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

九、有一個數列按照號碼是這樣排列的：1，4，7，10，13……..觀察後請回答下列問題：
(1)依照這種方式變化，在第 10 號時，這個數的數目是多少？　答：(　　)
(2)數目是 58 時，這個數字的號碼應該是？ 答：(　　)
(3)第 A 號時，他的數目是 151 個，A 的答案是？答：(　　)。
(4)第 81 號時，他的數目是 M 個，M 的答案是？答：(　　) 個。
(5) 如果是第 B 號，他的數目是 D 個，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

十、有一個數列按照號碼是這樣排列的：1，1+2，1+2+3，1+2+3+4，1+2+3+4+5……..觀察後請回答下列問題：
(1)依照這種方式變化，在第 10 號時，這個數的數目是多少？　答：(　　)
(2)數目是 210 時，這個號碼應該是？ 答：(　　)
(3)第 A 號時，他的數目是 120 個，A 的答案是？答：(　　)。
(4)第 24 號時，他的數目是 M 個，M 的答案是？答：(　　) 個。
(5) 如果是第 B 號，他的數目是 D 個，想一想，用一個算式表示 D 和 B 的關係。

4